Concours National Commun - Session 2011

Corrigé de l'épreuve d'algèbre

Transformation de Fourier discrète et algorithmique. Théorème de Courant-Fischer et applications.

Corrigé par M.TARQI[1] *http ://alkendy.x10.mx*

PREMIER PROBLÈME

1ère partie

Quelques propriétés de Φ_p

1.1

1.1.1 $\Phi_p(x) = 0$ si et seulement si $y_k = 0$, pour tout $k = 0, 1, ..., p-1$, donc $\Phi_p(x) = 0$ si et seulement si P_x annule les w_p^k, donc P_x est un polynôme nulle ($\deg P_x \leq p-1$ et les scalaires w_p^k sont deux à deux distincts).

1.1.2 Il est clair que Φ_p est un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$, de plus si $\Phi_p(x) = 0$ si et seulement si $P_x = 0$ ou encore $(x_0, x_1, ..., x_{p-1}) = x = 0$, donc Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{C}^p$.

1.2

1.2.1 Si $x = e_i$, alors $P_x = X^i$ et donc $\Phi_p(e_i) = (1, w_p^i, w_p^{2i} ..., w_p^{ji}, ..., w_p^{(p-1)i})$ et par conséquent $m_{ij} = (w_p^{ji})_{0\leq i,j\leq p-1}$. Ainsi

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_p & \dots & w^{p-1} \\ 1 & w_p^2 & \dots & w_p^{2(p-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w_p^{p-1} & \dots & w_p^{(p-1)^2} \end{pmatrix}$$

1.2.2 La matrice M est une matrice de Vandermonde, et comme les nombres $1, w_p, w_p^2, ..., w_p^{p-1}$ sont deux à deux distincts, alors M est inversible, donc on retrouve le fait que Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{C}^p$.

1.3

1.3.1 Les $(w_p^k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant les racines p-ièmes de l'unité, donc en tenant compte de la relation entre les coefficients et les racines, $\sum_{k=0}^{p-1} w_p^{(i-j)k} = 0$ si p ne divise pas $i-j$ et $\sum_{k=0}^{p-1} w_p^{(i-j)k} = p$ si p divise $i-j$. Ainsi si (i,j) sont dans $\{0, 1, 2, ..., p-1\}$, $\sum_{k=0}^{p-1} w_p^{(i-j)k} = p\delta_{ij}$, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

1.3.2 Soit $(x_0, x_1, ..., x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ et $(y_0, y_1, ..., y_{p-1}) = \Phi_p(x)$, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p-1} |y_k|^2 &= \sum_{k=0}^{p-1} P_x(w_p^k)\overline{P_x(w_p^k)} = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{p-1} x_i w_p^{ki} \sum_{i=0}^{p-1} \overline{x_j} w_p^{-kj}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p-1}|x_i|^2 + \sum_{i\neq j} x_i\overline{x_j}w_p^{k(i-j)}\right) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{p-1}|x_i|^2 + \sum_{i\neq j} x_i\overline{x_j}\sum_{k=0}^{p-1} w_p^{k(i-j)}\Big) \\
&= p\sum_{i=0}^{p-1}|x_i|^2 + 0 = p\sum_{i=0}^{p-1}|x_i|^2
\end{aligned}$$

[1]Si vous avez des critiques ou des encouragements à formuler sur le contenu, n'hésitez pas à nous en faire part, et surtout n'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

1.4

1.4.1 Notons $\overline{M}M = (c_{ij})_{0\leq i,j\leq p-1}$, alors pour tout (i,j), on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{p-1} w_p^{ik} w_p^{-kj} = \sum_{k=0}^{p-1} w_p^{(i-j)k} = \begin{cases} p, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où :

$$\overline{M}M = pI_p.$$

1.4.2 La relation $\overline{M}M = pI_p$ montre aussi que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{p}\overline{M}$.

Remarque : Si on pose $M = M_{w_p}$, alors $M^{-1} = \frac{1}{p} M_{w_p^{-1}}$.

$2^{\text{ème}}$ partie
Un peu d'algorithmique

2.1

2.1.1 D'après l'algorithme, on a pour tout $k = 0, 1, ..., \frac{p}{2} - 1$:

$$\begin{cases} F_k = w_p^k \gamma_k \\ \alpha_k = \beta_k + w_p^k \gamma_k \\ \beta_{k+\frac{p}{2}} = \beta_k - w_p^k \gamma_k \end{cases}$$

2.1.2 Par définition de Φ_a, on a pour tout $k = 0, 1, ..., p-1$:

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{p-1} a_j w_p^{kj} = \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{2j} w_p^{k2j} + \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{2j+1} w_p^{k(2j+1)}$$

Ceci s'écrit aussi $\alpha_k = \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{2j} w_{\frac{p}{2}}^{kj} + w_p^k \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{2j+1} w_{\frac{p}{2}}^{kj}$.
Finalement si $0 \leq k \leq \frac{p}{2}$

$$\alpha_k = \beta_k + w_p^k \gamma_k,$$

et

$$\alpha_{k+\frac{p}{2}} = \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{2j} w_{\frac{p}{2}}^{(k+\frac{p}{2})j} - w_p^k \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{2j+1} w_{\frac{p}{2}}^{(k+\frac{p}{2})j},$$

et donc

$$\alpha_{k+\frac{p}{2}} = \beta_k - w_p^k \gamma_k.$$

Donc l'algorithme de la question 2.1 permet de calculer de proche en proche toutes les composantes de $\Phi_p(a)$.

2.2

2.2.1 Dans cette question on supposera que les différentes puissances de w_p ont été calculées. On a $\Phi_2(a_0, a_1) = (a_0+a_1, a_0-a_1)$, donc $s_1 = 2$ et $r_1 = 0$. La calcul de $\Phi_{2^n}(a)$ fait intervenir deux transformations de Fourier de taille $\frac{p}{2}$ à savoir $\Phi_{\frac{p}{2}}(b)$ et $\Phi_{\frac{p}{2}}(c)$, ainsi $\frac{p}{2}$ multiplications complexes et p additions complexes. On a donc les formules de récurrences suivantes :

$$\begin{cases} s_n = 2s_{n-1} + p = 2s_{n-1} + 2^n \\ r_n = 2r_{n-1} + \dfrac{p}{2} = 2r_{n-1} + 2^{n-1}, \quad n > 1. \end{cases}$$

2.2.1 Notons $u_n = s_n + r_n$ le nombre total des additions et de multiplications complexes nécessaires au calcul de $\Phi_{2^n}(a)$, alors on a :

$$u_1 = 2 \text{ et } u_n = 2u_{n-1} + 3 \times 2^{n-1}, \quad n > 1.$$

Ainsi $u_n = 2^n + 3(n-1)2^{n-1} = p + \dfrac{3}{2}p(\log_2 p - 1)$.

2.3

2.3.1 Pour évaluer le polynôme en λ on pose :

$y_{p-1} = a_{p-1}$, $y_{p-2} = a_{p-2} + \lambda y_{p-1}$,...,$y_{p-k} = a_{p-k} + \lambda y_{n-k+}$ pour $k = 3, ..., p-1$.

Alors $y_0 = P_a(\lambda)$ et donc on a besoin de $2(p-1)$ opérations : $p-1$ additions et $p-1$ multiplications.

2.3.1 Notons v_p le nombre total des additions et de multiplications complexes nécessaires au calcul de $\Phi_p(a)$ par la méthode de Hörner. Pour calculer $\Phi_{2^n}(a)$ on aura besoin de p valeurs $y_k = P_a(w_p^k)$, $k = 0, 1, ..., p-1$, donc le calcul de $\Phi_{2^n}(a)$ demande $2p(p-1)$ opérations, soit $v_p = 2p^2 - 2p$.

2.4 La méthode de division décrite dans la question 2.1.2 demande u_n opérations avec

$$u_n = p + \frac{3}{2}p(\log_2 p - 1) = O(p \log_2 p),$$

alors que la méthode d'Hörner demande v_n opérations avec

$$v_p = 2p^2 - 2p = O(p^2).$$

Conclusion : le calcul par la première méthode est donc très nettement plus rapide que celui par la deuxième méthode.

Deuxième problème

1ère partie
Théorème de Courant-Fischer

1.1 Puisque A est symétrique, l'endomorphisme f_A est symétrique. D'après le théorème spectrale, toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable, autrement dit $\mathbb{R}^n$ admet une base orthonormée de vecteurs propres de f_A.

1.2

1.2.1 Pour tout $k = 1, 2, ..., n$, on a $f_A(e_k) = \lambda_k e_k$, et donc $R_A(e_k) = \dfrac{(f_A(e_k)|e_k)}{(e_k|e_k)} = \dfrac{(\lambda_k e_k|e_k)}{(e_k|e_k)} = \lambda_k$.

1.2.2 Soit $v = \sum\limits_{i=1}^{k} v_i e_i \in V_k$ un vecteur non nul, alors :

$$(f_A(v)|v) = \left.\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \right| \sum_{i=1}^{k} v_i e_i \Bigg) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} v_i^2$$

et donc

$$R_A(v) = \frac{(f_A(v)|v)}{(v|v)} \leq \lambda_k.$$

D'autre part, on sait que $R_A(e_k) = \lambda_k$ avec $e_k \in V_k \backslash \{0\}$, donc $\lambda_k = \max\limits_{u \in V_k \backslash \{0\}} R_A(u)$.

1.3

1.3.1 Si $\dim(F \cap \mathrm{Vect}(e_k, ..., e_n)) = 0$, alors on aura :

$$\dim\left(F + \mathrm{Vect}(e_k, ..., e_n\right) = \dim F + \dim \mathrm{Vect}(e_k, ..., e_n)) = k + n - k + 1 = n + 1,$$

et ceci est absurde, donc nécessairement $\dim(F \cap \mathrm{Vect}(e_k, ..., e_n)) \geq 1$.

1.3.2 Soit $w = \sum\limits_{i=k}^{n} w_i e_i \in F \cap \mathrm{Vect}(e_k, ..., e_n)$ non nul, alors alors :

$$(f_A(w)|w) = \left.\sum_{i=k}^{n} \lambda_i w_i \right| \sum_{i=k}^{n} w_i e_i \Bigg) = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i w_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^{n} w_i^2,$$

et donc

$$R_A(w) = \frac{(f_A(w)|w)}{(w|w)} \geq \lambda_k.$$

1.4 D'après ce qui précède, pour tout $F \in \mathcal{F}_k$, il existe $w \in F$ non nul tel que $R_A(w) \geq \lambda_k$, donc pour tout $F \in \mathcal{F}_k$ $\max\limits_{w \in F \backslash \{0\}} R_A(w) \geq \lambda_k$. Or il existe $F \in \mathcal{F}_k$, $F = V_k$ tel que $\lambda_k = \max\limits_{u \in V_k \backslash \{0\}} R_A(v)$, on en déduit l'égalité demandée :

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{v \in F \backslash \{0\}} R_A(v) \right).$$

2ème partie
Continuité de dérivabilité des valeurs propres d'une applications matricielle

2.1 Par définition de la norme subordonnée et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a, pour tout $v \in \mathcal{M}_{n,1}$:

$$|(Cv|v)| \leq \|Cv\| \|v\|_2 \leq \|C\| \|v\|_2^2$$

et donc si $v \neq 0$,

$$\left| \frac{(Cv|v)}{(v|v)} \right| \leq \|C\|.$$

2.2

2.2.1 Soit $v \in V_k(t_0)$ non nul, alors on a :

$$R_{A(t)}(v) = R_{A(t)-A(t_0)}(v) + R_{A(t_0)}(v) \leq \lambda_k(t_0) + \sup\{R_{A(t)-A(t_0)}(v)/v \in V_k(t_0) \backslash \{0\}\}$$

En particulier, si $v \in V_k(t_0) \cap \mathrm{Vect}(e_k(t), ..., e_n(t))$ on aura $\lambda_k(t) \leq R_{A(t)}(v)$ et donc

$$\lambda_k(t) \leq \lambda_k(t_0) + \sup\{R_{A(t)-A(t_0)}(v)/v \in V_k(t_0) \backslash \{0\}\}.$$

2.2.2 Soit $t, t_0 \in I$. Puisque t et t_0 jouent le même rôle, l'inégalité précédente de la question peut s'écrire aussi :

$$|\lambda_k(t) - \lambda_k(t_0)| \leq |\sup\{R_{A(t)-A(t_0)}(v)/v \in V_k(t_0)\backslash\{0\}\}|$$

mais la question 2.1 de cette partie montre que :

$$\left|R_{A(t)-A(t_0)(v)}\right| \leq \|A(t) - A(t_0)\|.$$

D'où

$$\forall (t, t_0) \in I^2, \quad |\lambda_k(t) - \lambda_k(t_0)| \leq \|A(t) - A(t_0)\|,$$

et la continuité de A entraîne celle de λ_k.

2.3

2.3.1 L'application A est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les applications a et b sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{t\to 0} a(t) = 0$, donc a est continue sur $\mathbb{R}$;
- $\forall t \neq 0$, $a'(t) = \dfrac{2}{t^3} e^{\frac{-1}{t^2}} \cos\left(\dfrac{1}{t}\right) + \dfrac{1}{t^2} e^{\frac{-1}{t^2}} \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$;
- $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{a(t)}{t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} a'(t) = \lim\limits_{|x|\to\infty} x^3 e^{-x^2}(2x\cos x + \sin x) = 0$.

Ainsi a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, le même raisonnement se fait pour montrer que l'application b est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.3.1 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est symétrique donc est daigonalisable sur $\mathbb{R}$, Notons $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ les valeurs propres de $A(t)$ et $v_1(t), v_2(t)$ deux valeurs propres respectivement associées.
Si $t = 0$ $A(t) = 0$ et $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 0$.
Soit maintenant $t \neq 0$, le polynôme caractéristique de $A(t)$ est

$$X^2 - a^2(t) - b^2(t) = X^2 - e^{\frac{-2}{t^2}},$$

et donc les valeurs propres sont $\lambda_1(t) = e^{\frac{-1}{t^2}}$ et $\lambda_2(t) = -e^{\frac{-1}{t^2}}$.

- Le sous espace associé à $\lambda_1(t)$ est engendré par l'application $v_1(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{1}{2t}\right) \\ \sin\left(\dfrac{1}{2t}\right) \end{pmatrix}$ si $t \neq \dfrac{1}{2k\pi}$ et $v_1\left(\dfrac{1}{2k\pi}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Le sous espace associé à $\lambda_2(t)$ est engendré par l'application $v_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin\left(\dfrac{1}{2t}\right) \\ \cos\left(\dfrac{1}{2t}\right) \end{pmatrix}$ si $t \neq \dfrac{1}{(2k+1)\pi}$ et $v_1\left(\dfrac{1}{(2k+1)\pi}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.3.3 Supposons qu'une telle fonction e existe, posons $e(t) = (e_1(t), e_2(t))$, alors on aura :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \;\; A(t)e(t) = \lambda_1(t)e(t) \;\; ou \;\; A(t)e(t) = \lambda_2(t)e(t).$$

Si $A(t)e(t) = \lambda_1(t)e(t)$, alors

$$(*) \quad \forall t \in \mathbb{R}^*, \quad e_1(t) = \cos\left(\frac{1}{t}\right) e_1(t) + \sin\left(\frac{1}{t}\right) e_2(t).$$

Si $t = \dfrac{1}{(2k+1)\pi}$, la relation $(*)$ donne $e_1\left(\dfrac{1}{(2k+1)\pi}\right) = 0$ et par continuité on aura :

$$(1) \quad e_1(0) = 0.$$

Si $t = \dfrac{2}{(1+4k)\pi}$, on obtient $e_1\left(\dfrac{2}{(1+4k)\pi}\right) = e_2\left(\dfrac{2}{(1+4k)\pi}\right)$ et de même raison on aura :

$$(2) \quad e_1(0) = e_2(0).$$

On déduit de (1) et (2) que $e_1(0) = e_2(0) = 0$ et ceci est absurde puisque e est un vecteur propre.
La même conclusion dans le cas où $A(t)e(t) = \lambda_2(t)e(t)$.

2.4 Soit $t \in I$. $M(t)$ étant symétrique réelle, donc elle est diagonalisable, soient $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ ses valeurs propres
Posons, pour tout $t \in I$, $M(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I dans $\mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique de $M(t)$ s'écrit donc :

$$\chi_{M(t)}(X) = X^2 - (a(t) + c(t))X + (a(t)c(t) - b(t)^2)$$

Il admet pour discriminant

$$\Delta(t) = (a(t) + c(t))^2 - 4(a(t)c(t) - b(t)^2) = (a(t) - c(t))^2 + (2b(t))^2$$

et d'après les donnés, il existe une application $\mu : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in I, \quad (a(t) - c(t))^2 + (2b(t))^2 = \mu^2(t),$$

donc les valeurs de $M(t)$ sont $\lambda_1(t) = \mu(t)$ et $\lambda_2(t) = -\mu(t)$, elles sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

2.5

2.5.1 Si $t = 0$, $B(t) = 0$. Soit maintenant $t \neq 0$, alors le polynôme caractéristique de $B(t)$ s'écrit :

$$X^2 - t^4\left(2 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 = \left(X - t^2\left(2 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right)\left(X + t^2\left(2 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right)$$

Donc le polynôme caractéristique de $B(t)$ est scindé à racines simples, donc $B(t)$ est daigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.5.2 B est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si b est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il est clair que b est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, en 0, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{b(t)}{t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0} b'(t) = 0$. Donc B est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Mais si on désigne par $\lambda(t) = t^2\left(2 + \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$ si $t \neq 0$ et $\lambda(0) = 0$, alors λ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais en 0, $\lim\limits_{t \to 0} \lambda'(t)$ n'existe pas puisque

$$\lambda'(t) = 4t + 2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right),$$

pour tout t non nul.

FIN DE L'ÉPREUVE